

Gedanken zum Kontinuum

Wir betrachten Punktmengen. Solange wir uns im nur potentiell Unendlichen bewegen enthalten solche Punktmengen nur endlich viele Punkte aus einem wie auch immer definierten "Raum". Wie groß auch immer eine solche Punktmenge gewählt wurde, **die tatsächliche Punktmenge auch im nur potentiell Unendlichen ist unendlich mal größer.**

Die Umgebung eines Punktes P beim beliebigen Durchlaufen im Raum sieht daher so aus: **"andere Punkte - P - andere Punkte"**.

Führt man nun ein aktual Unendliches ein ändert sich die Umgebung jedes Punktes P der gesamten potentiell unendlichen Punktmenge **plötzlich für alle (potentiell) unendlich vielen Punkte zu "Kontinuum - P - Kontinuum"**. Das aktual Unendliche fließt so in das potentiell Unendliche ein, dass es jeden einzelnen dessen (des potentiell Unendlichen) Punkte vollständig umhüllt **und zwar plötzlich, also "at once"**. Man sieht dabei deutlich, wie angemessen dieser Ausdruck ist.

Mein Ziel ist es aber zu zeigen, **dass die Einführung eines derartigen "at once infinite" zu einem Widerspruch führt.** Nur durch einen Widerspruch kann ja ein System falsifiziert werden. Diesen Widerspruch werde ich mit Hilfe einer abzählbaren Anordnung aller möglichen **"Denkobjekte"** herbeiführen. Als Denkobjekt bezeichne ich dabei **"alles woran irgend eine mögliche Person je denken kann"**. Dazu gehören die vorhin erwähnten Punkte P (ebenso wie die aus ihnen gebildeten Punktmengen). Sind aber alle **denkbaren** Punkte abzählbar dann verliert das at once infinite seinen Inhalt.

Wie können wir nun eine Ordnung in **"alle möglichen Denkobjekte"** bringen? Dazu fordern wir, dass jedes mögliche Denkobjekt jeder möglichen Person von dieser Person in Form einer schriftlichen Mitteilung M beschrieben werden kann. Dies bedeutet insoweit keine wesentliche Einschränkung als eine solche Beschreibung auch "das Objekt, an das ich gerade denke" oder "das Objekt, an das ich zu einem bestimmten Zeitpunkt gedacht habe" lauten kann. Solche Beschreibungen werden noch weiter unten für den Nachweis eines Widerspruchs verwendet.

Als ersten Schritt ordnen wir **"alle möglichen Mitteilungen M"** an. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit lassen wir als eine **"Mitteilung M vom Umfang n"** jeden quadratischen Raster zu, der aus n^2 Elementarquadraten der Seitenlänge 0,01mm besteht von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist. Alle möglichen Mitteilungen ordnen wir zunächst in Gruppen nach ihrem Umfang n an. Jede Mitteilung vom Umfang n besteht aus n^2 Elementarquadraten, die in n Zeilen zu n Stellen angeordnet sind. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit EQ_{jk} und die zugeordnete Ziffer (1 oder 2) mit a_{jk} . Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl

$$a(M) = 0, a_{11}a_{12} \dots a_{1n} a_{21}a_{22} \dots a_{jk} \dots a_{nn}$$

eindeutig dargestellt. Alle möglichen Mitteilungen M ordnen wir jetzt zunächst in Gruppen nach ihrem Umfang n und innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von $a(M)$ in einer Anordnung **AO(M)** abzählbar an.

Um zu einer Anordnung aller möglichen Denkbjekte zu gelangen erinnern wir daran, dass wir gefordert haben, jedes mögliche Denkobjekt jeder möglichen Person P (kursiv geschrieben zur Unterscheidung von der weiter oben verwendeten Bezeichnung P für einen Punkt im Raum) müsse von dieser durch eine Mitteilung M beschrieben werden können. Diese Forderung ist offenbar gleichbedeutend mit der Feststellung, P erkläre, beim Lesen der Mitteilung M , der "Sinn" dieser Mitteilung sei ein bestimmtes Denkobjekt DO . Dieses Denkobjekt ist offenbar von der Person P und von der Mitteilung M abhängig und kann durch $DO(P,M)$ bezeichnet werden. Wir merken aber bereits hier an, dass ein und die selbe Mitteilung M für eine Person P in verschiedenen Zeitpunkten und an verschiedenen Orten unterschiedlichen Sinn haben kann.

Der Sinn einer Mitteilung ergibt sich also erst durch einen **Lesevorgang**. Wir bezeichnen mit $L(P)$ einen Lesevorgang durch eine Person P . Nun setzen wir fort mit einer **abzählbaren Anordnung AO[L(P)] aller möglichen Lesevorgänge L(P)**. Um die Abhängigkeit des Sinnes einer Mitteilung auch von Ort und Zeit des Lesens berücksichtigen zu können wählen wir zunächst ein Koordinatensystem im Raum-Zeit-Universum mit drei Raumkoordinaten und einer Zeitkoordinate.

Mit Hilfe dieses Koordinatensystems zerlegen wir das Raum-Zeit-Universum in Raum-Zeit Elemente RZE. Ein Raum-Zeit-Element RZE sei ein (vierdimensionaler) Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm (drei Raumkoordinaten) und der Dauer 0,01 Sek. (eine Zeitkoordinate). Mit Hilfe des vorhin gewählten Koordinatensystems im Raum-Zeit-Universum lassen sich alle Elementarwürfel EW in einer Anordnung **AO(EW)** abzählbar anordnen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass in jedem Raum-Zeit-Volumen, das jede mögliche Person P während jedes möglichen Lesevorganges $L(P)$ einnimmt mindestens ein Elementarwürfel $EW([L(P)])$ zur Gänze liegt. Dieser Elementarwürfel kennzeichnet daher den Lesevorgang $L(P)$ eindeutig.

Mit Hilfe der abzählbaren Anordnung $AO(EW)$ aller Elementarwürfel lassen sich alle möglichen Lesevorgänge $L(P)$, die ja jeweils durch mindestens einen EW eindeutig gekennzeichnet sind, abzählbar anordnen. Wir bezeichnen diese abzählbare Anordnung aller möglichen Lesevorgänge $L(P)$ mit **AO[L(P)]**.

Wir beenden unsere Ordnungsstruktur mit der **abzählbaren Anordnung aller möglichen Denkbjekte**. Als Denkobjekt haben wir den Sinn bezeichnet, den eine Mitteilung M für eine Person P hat, welche diese Mitteilung liest. Jedes mögliche Denkobjekt hat daher eine mögliche Mitteilung M und einen möglichen Lesevorgang

$L(P)$ zur Voraussetzung, die dieses Denkobjekt eindeutig kennzeichnen. Alle möglichen Mitteilungen M sind in $AO(M)$ abzählbar angeordnet, alle möglichen Lesevorgänge $L(P)$ in $AO[L(P)]$. Aus den abzählbaren Anordnungen $AO(M)$ und $AO[L(P)]$ erhält man daher die gewünschte abzählbare Anordnung $AO[DO(P,M)]$ aller möglichen Denkobjekte. Wir bezeichnen diese Denkobjekte als **durch eine Mitteilung M darstellbar**.

Wir halten fest, dass der Sinn einer Mitteilung M sich nur durch eine individuelle Meinungsäußerung einer Person P manifestieren kann. Es gibt kein Kriterium für die Richtigkeit oder die Unrichtigkeit einer solchen Meinung, **außer sie enthält einen Widerspruch in sich. Dieser würde die Unrichtigkeit der Meinung beweisen**.

Es bleibt noch zu zeigen, dass das Einfließen eines "at once infinite" zu einem solchen Widerspruch führt. Wir haben oben gezeigt, dass die Menge aller möglichen Denkobjekte abzählbar ist. Welche Eigenschaften müssten Elemente E haben, die nicht in der Anordnung $AO[DO(P,M)]$ enthalten sind? Sie sind offenbar keine möglichen Denkobjekte im Sinne unserer obigen Definition. Das heißt, es kann keine Person P geben, die irgendwann irgendwo an ein solches Element E denkt.

Wir zeigen nun, jede Behauptung eines Kritikers PK , der von Elementen E spricht, die nicht in der Anordnung $AO[DO(P,M)]$ enthalten sind, führt zu einem Widerspruch. Dies zeigen wir folgendermaßen: Es sei EK ein Element E , von dem PK behauptet, es sei nicht in $AO[DO(P,M)]$ enthalten. PK behauptet also **$EK \notin AO[DO(P,M)]$** und zwar **für alle möglichen Mitteilungen M** .

Zweifellos ist EK im Zeitpunkt dieser Behauptung ein Denkobjekt DOK von PK . Dieser Kritiker muss seine Behauptung an irgend einer Stelle des Raum-Zeit-Universums aufstellen. Es gibt daher ein kritisches Raum-Zeit-Element $RZEK$, welches das Element EK eindeutig kennzeichnet. Der Kritiker muss feststellen, dass die Mitteilung M : "Das Element , an das ich im Raum-Zeit-Element $RZEK$ gedacht habe", EK eindeutig kennzeichnet. Daraus folgt aber: **$EK \in AO[DO(P,M)]$** .

Aus $EK \notin AO[DO(P,M)]$ für alle M und $EK \in AO[DO(P,M)]$ folgt der oben erwähnte Widerspruch.

Schlussbemerkung: Treten zwischen zwei Systemen Widersprüche auf, müssen sie auf unterschiedlichen Axiomen beruhen. Im vorliegenden Fall ist es offenbar meine Forderung, dass alles worüber man sprechen kann (in meiner Terminologie also alle Denkobjekte) in Form einer Mitteilung M , also schriftlich, dargestellt werden kann. Mathematiker fordern selbstverständlich schriftliche Beweise (z.B. Vier-Farben-Satz, Großer Fermat etc.). Diese Schriftlichkeit fehlt aber oft in Axiomensystemen (z.B. Mengenlehre). Dadurch kommt es zu widersprüchlichen Konstruktionen wie: "Ich betrachte zunächst die Menge M_1 bestehend aus allen Elementen E_1 über die gesprochen werden kann. Anschließend spreche ich über die Menge M_2 bestehend aus allen Elementen E_2 über die nicht gesprochen werden kann".